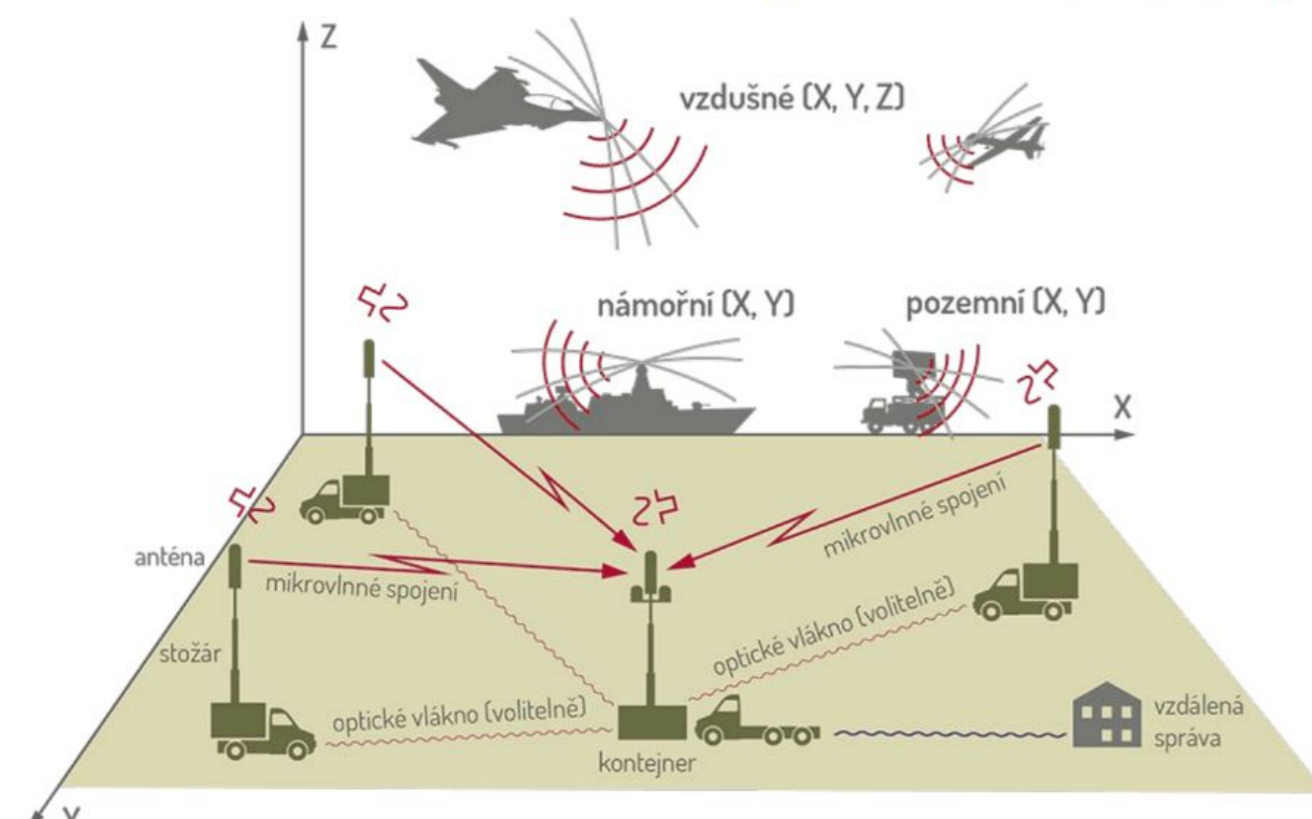


# Moderní metody řešení průniku tří kvadrik ve třech dimenzích (3Q3) a jejich využití v multilateračních systémech

David Kamenský  
Ústav matematiky



## Pasivní radary



Zdroj: <https://www.era.aero/cs/military-security/vera-ng>

Pasivní radary nevysílají žádný signál. Namísto toho se spoléhají na signál, který vyzařuje sledovaný cíl.

Pro lokalizaci cíle je třeba změřit rozdíly času detekce signálu (TDOA) a vyřešit soustavu rovnic:

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = c \cdot \Delta t_{0i}$$

Soustavu lze převést na soustavu kvadratických rovnic, které odpovídají problému průniku 3 kvadrik (3Q3).

Cílem práce je navrhnout vhodný algoritmus pro řešení takto získané soustavy rovnic.

## Metody řešení 3Q3

Po provedení rešerše dostupných metod pro řešení 3Q3 byly identifikovány jako nejvhodnější následující:

### Homotopy Continuation Method (HCM)

Metoda využívá spojité transformace ze snadno řešitelné soustavy do zkoumané soustavy:  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_0(1 - t_i) + \mathbf{c}_n t_i$ .

Řešení soustavy se sleduje např. Newtonovou metodou.

### Resultant

Metoda eliminuje proměnné pomocí determinantu tzv. Sylvestrovovy matice.

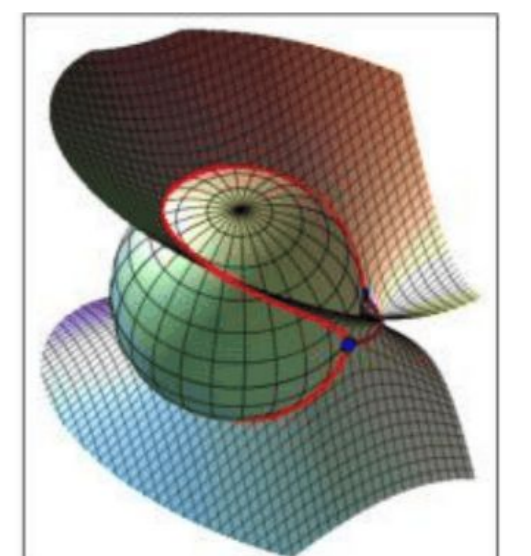
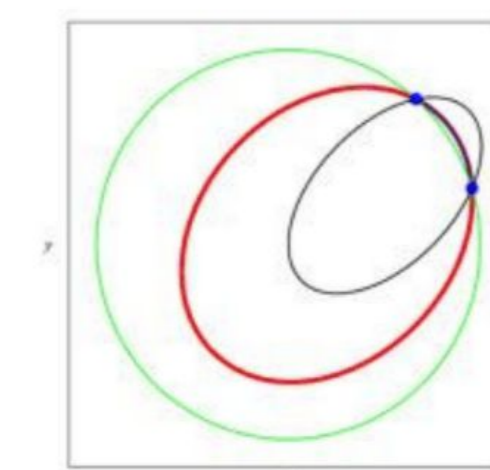
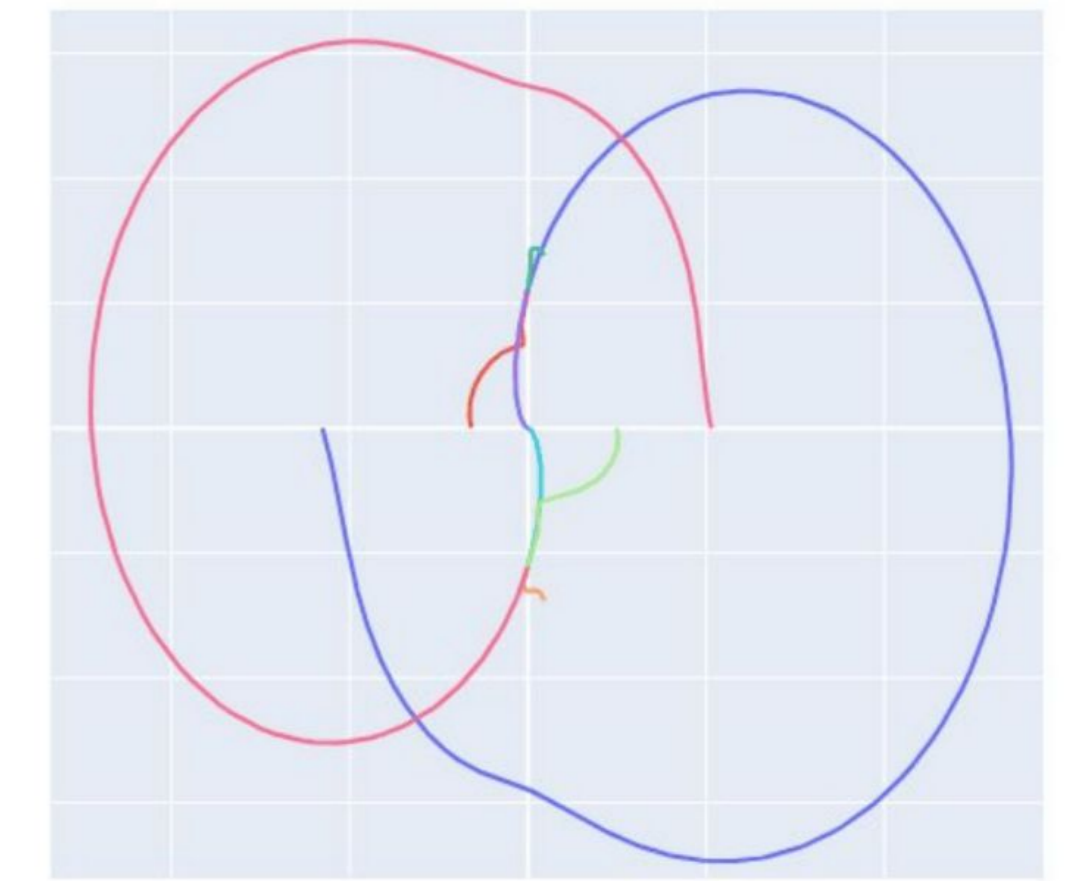
Resultant dvou kvadrik odpovídá promítnutí jejich průsečíku do roviny.

### Efficient 3Q3 solver (E3Q3)

Čistě algebraický postup, který vyjádří  $y^2$ ,  $z^2$  a  $yz$  pomocí  $y$ ,  $z$  a polynomů v  $x$ .

Dosažením do triviálních identit pak dostaneme homogenní soustavu.

Z podmínky řešitelnosti dostaneme rovnici v  $x$ .

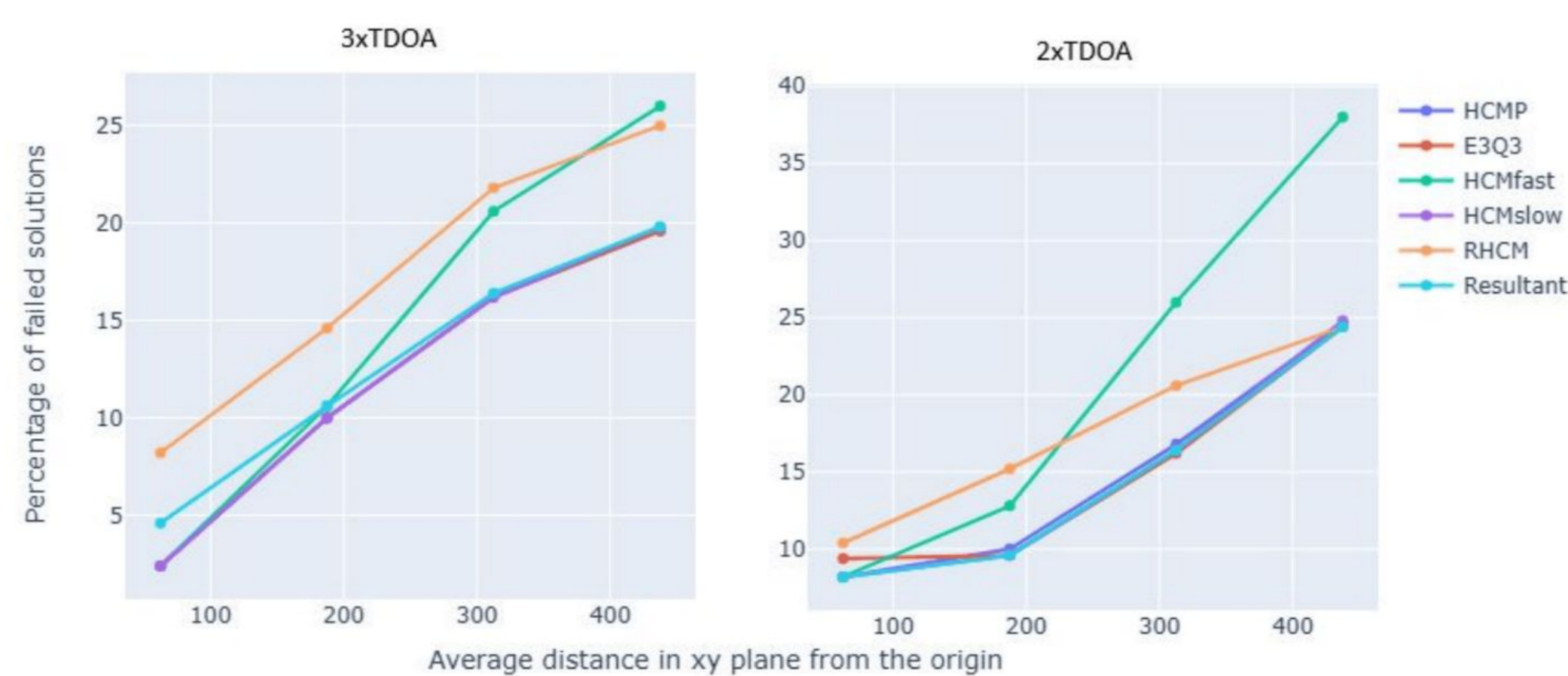


Zdroj: Laureano Gonzalez-Vega, Alexandre Trocadero, Tools for analyzing the intersection curve between two quadrics through projection and lifting

## Srovnání metod

- Implementace v Pythonu
- 2 scénáře:
  - 3xTDOA - všechny detektory zaznamenaly signál
  - 2xTDOA - jeden detektor nezaznamenal signál, chybějící rovnice je nahrazena sférou odhadu výšky cíle nad zemí
- Testování na simulovaných datech
- Uvažujeme chybu měření
- Pro Resultant, E3Q3 a HCMP (verze HCM) jen minimální rozdíly v přesnosti
- Rozhodující je rychlost

[# řešení/s]	3xTDOA	2xTDOA
HCMP	22,7	16,6
E3Q3	2616,5	1556,4
HCM fast	6,44	9,07
HCM slow	1,17	1,03
RHCM	1,67	2,60
Resultant	0,195	0,109



## ME3Q3

Kvůli chybě měření často zmizí průnik kvadrik v okolí cíle.

Velká rychlost E3Q3 nám umožňuje zkoumat problémy s posunutým TDOA.

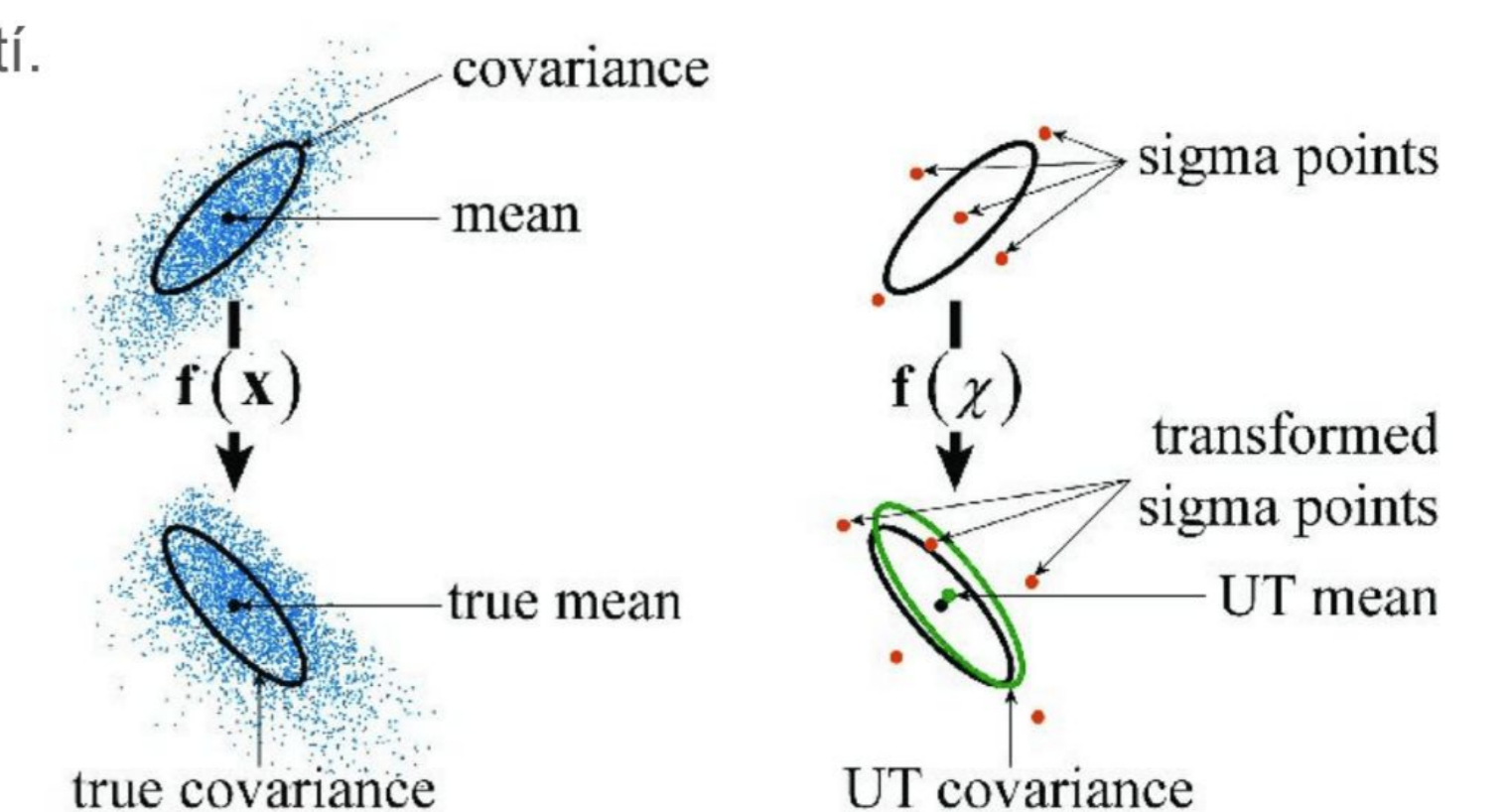
Snahou je vybrat sérii posunutí, které obnoví existenci průniku.

Díky znalosti kovarianční matice TDOA můžeme využít sigma bodů z metody Unscented Transform - reprezentativní směry.

Optimalizace pořadí směru a velikosti posunutí.

$$\mathbf{Q} = \sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}_{xx}}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{n + \kappa} \left\{ \kappa f(\xi_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i) \right\}$$

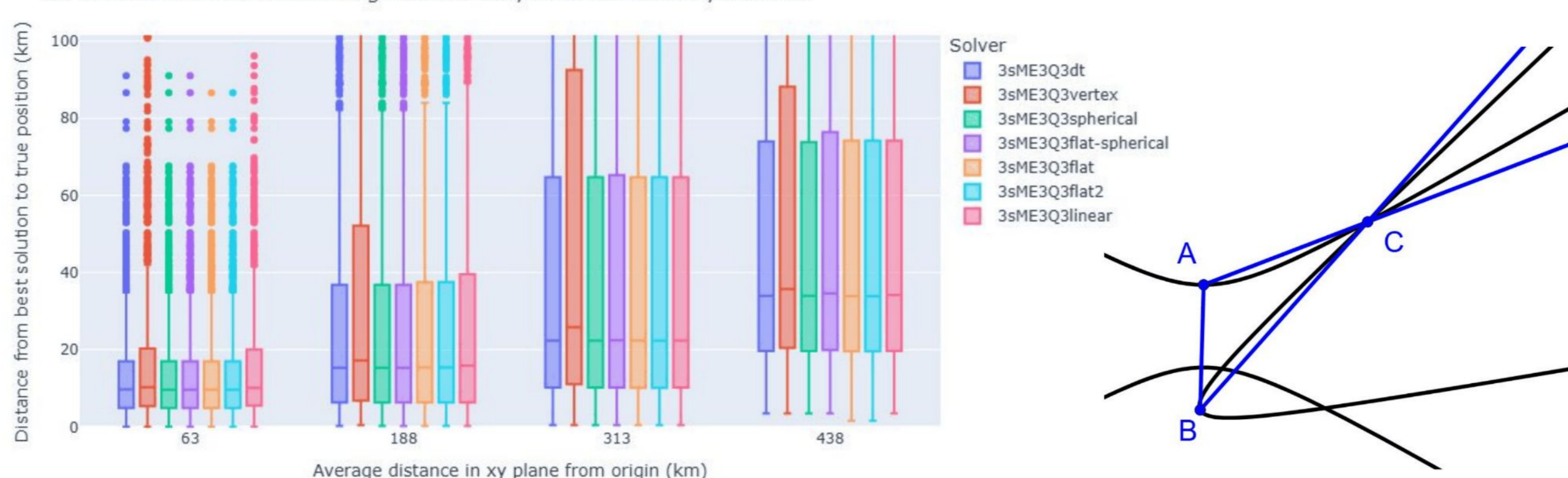


Zdroj: Juncya, Karel & Pidanic, Jan & Mishra, Amit & Morić, Zlatan & Sedivy, Pavel. (2022). Wind Turbine Micro-Doppler Prediction Using Unscented Kalman Filter.

## Odhad chyby

- Potřebujeme co nejlepší odhad chyby řešení ze dvou důvodů:
  - Soustava má obecně až 8 řešení. Je třeba určit, zda jedno z nich odpovídá reálnému cíli a vybrat ho.
  - V případě, že více posunutí TDOA vede k průsečíku v okolí cíle, je třeba vybrat to s nejmenší chybou.
- Byla vyvinuta řada způsobů odhadu chyby např. pomocí linearizace, posunu výrazných prvků na kvadrikách, či aproximace průsečnic jednoduššími křivkami.
- Řada postupů má podobné výsledky - byl vybrán ten nejrychlejší.

2x TDOA with an estimated height and errors, 1000 simulations/distance



## Výsledky

- Pro 3xTDOA navržený algoritmus výrazně zvýší spolehlivost
- I přes zpomalení je řádově rychlejší než alternativní metody
- Pro 2xTDOA menší zlepšení

