FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ ústav matematiky

Internetová matematická olympiáda, 9. ročník, 29. 11. 2016

http://matholymp.fme.vutbr.cz/

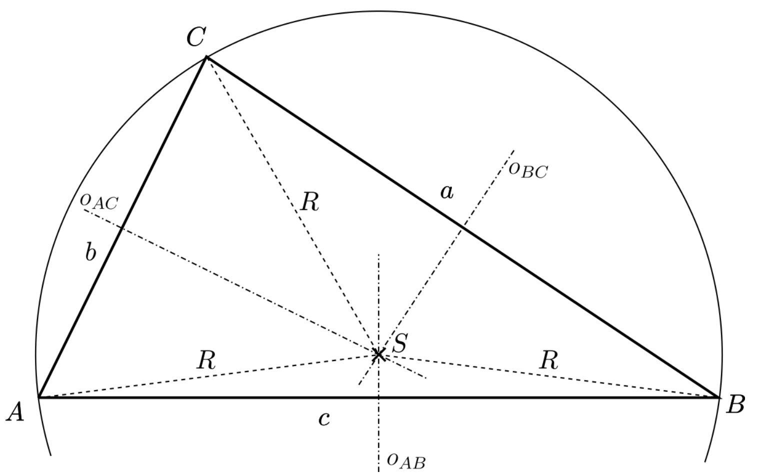
1. Dokažte, že pro trojúhelník ABC a poloměr R kružnice jemu opsané, platí vztah

$$R = \frac{abc}{4P_{\triangle ABC}}, \tag{1}$$

kde $P_{\triangle ABC}$ je obsah trojúhelníku ABC.

Řešení příkladu 1:

Střed S kružnice opsané $\triangle ABC$ leží v průsečíku os stran tohoto trojúhelníku, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: K řešení příkladu 1 - střed S kružnice opsané $\triangle ABC$

Platí, že velikost obvodového úhlu, který je příslušný danému oblouku, je vždy stejná. Označme bod M jako druhý bod průměru kružnice opsané, který prochází bodem C, viz Obrázek 2.

Potom

$$|\measuredangle AMC| = |\measuredangle ABC| = \omega.$$

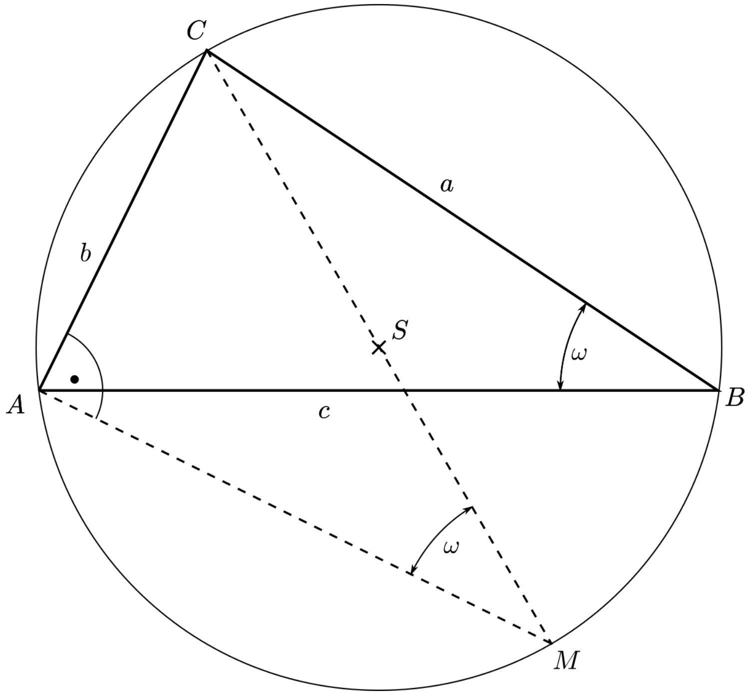
Z Obrázku 2 je na základě Thaletovy věty zřejmé, že $|\measuredangle CAM| = 90°$.

Označme patu výšky v_c spuštěné z vrcholu C na stranu AB jako bod N, viz Obrázek 3.

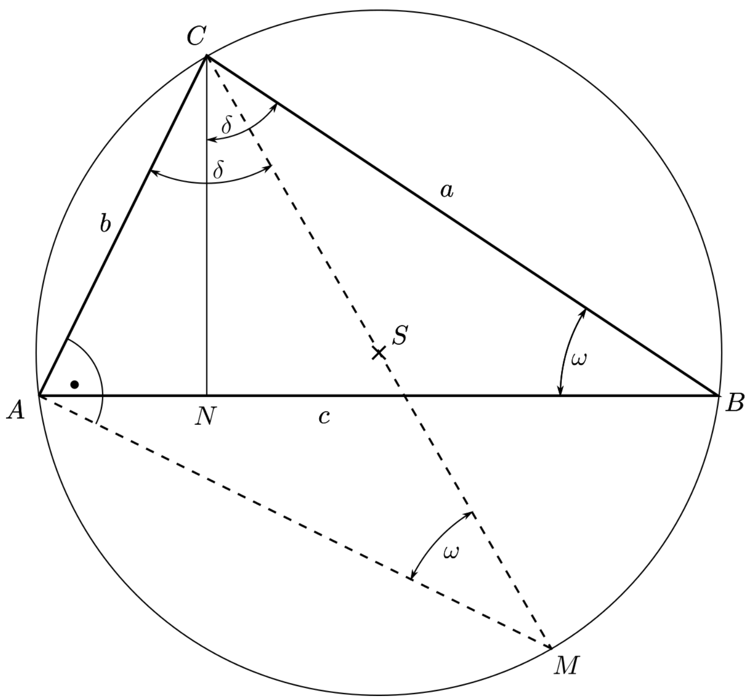
Potom je zřejmé, že $\triangle AMC$ a $\triangle NBC$ jsou podobné. Díky této podobnosti trojúhelníků získáváme rovnost vyjadřující poměr délek odpovídajících si stran

$$\frac{b}{v_c} = \frac{2R}{a}.$$

Další úpravy povedou už jen k elegantnímu výslednému tvaru, kde osamostatníme poloměr R kružnice opsané na levé straně, tedy



Obrázek 2: K řešení příkladu 1 - obvodové úhly



Obrázek 3: K řešení příkladu 1 - podobné trojúhelníky AMC a NBC

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{2R} &= \frac{v_c}{a}, \\
ab \cdot c &= v_c 2R \cdot c, \\
\frac{abc}{4} &= \frac{cv_c}{2} \cdot R, \\
\frac{abc}{4} &= P_{\triangle ABC} \cdot R, \\
R &= \frac{abc}{4P_{\triangle ABC}}.
\end{aligned}
$$

2. Máme kozu a travnatou obdélníkovou zahradu lemovanou ze všech stran květinovým záhonem. Dále máme k dispozici kladivo, dva kolíky, dostatečně dlouhý provaz a pro kozu máme obojek s očkem, kterým lze volně protáhnout provaz. Vyhovuje nám, že koza spásá trávu, ale rozhodně nesmí okusovat květiny. Rozhodněte, jaký tvar bude mít vypasená plocha. Dále určete souřadnice bodů, kam na zahradě umístíme kolíky a délku provazu, který ke kolíkům přivážeme, aby měla koza možnost spást co největší travnatou plochu a přitom neohrozila květiny. Vzdálenost od očka na obojku k tlamě kozy zanedbáváme.

   Řešení příkladu 2:

   Nechť má travnatá plocha z vnějšku ohraničená květinami tvar obdélníka o stranách $2a \geq 2b > 0$. Kdybychom měli k dispozici jen jeden kolík, tak bychom koze umožnili vypást kruh s poloměrem $r = b$ se středem například uprostřed obdélníkové zahrady. Máme-li k dispozici 2 kolíky a provaz délky nejméně $2a$, tak maximální vypasené plochy dosáhneme, když budeme uvažovat o elipse, kde kolíky budou vumístěné v ohniscích elipsy. Máme-li určit souřadnice pro umístění kolíků, zavedeme souřadný systém například tak, že počátek umístíme do středu obdélníka, osu x zvolíme rovnoběžnou s delší stranou obdélníka a osu y rovnoběžnou s kratší stranou obdélníka. Pak uvažovaná elipsa bude mít hlavní vrcholy $A[-a; 0]$ a $B[a; 0]$ a vedlejší vrcholy $C[0; b]$ a $D[0; -b]$. Kolíky tedy zatlučeme do ohnisek $F[-e; 0]$ a $G[e; 0]$ elipsy, kde

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

   a kroužek na obojku kozy navlékneme na provaz délky $2a$, který krajními konci ukotvíme na kolících v bodech F a G. Pokud se koza nenamotá na některý z kolíků, tak bude mít možnost vypást množinu bodů M, pro které platí

$$|FM| + |GM| \leq 2a,$$

   což je elipsa s hlavní poloosou délky a, vedlejší poloosou délky b a její vnitřek.

3. U domovních dveří je n zvonkových tlačítek se jmény jednotlivých nájemníků bytů. K nim je třeba připojit n linek vedoucích do jednotlivých bytů. Montér zapojil linky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna linka je zapojena správně? Výslednou pravděpodobnost (pro obecné n) zapište co nejjednodušším výrazem a poté ji vyčíslete pro $n = 5$. Dále vypočtěte limitu této pravděpodobnosti s přesností na 4 desetinná místa pro $n \to \infty$ (opravdu pro $n \to \infty$, tedy nikoliv jen vyčíslením předchozího výsledku pro větší hodnotu n).

   Řešení příkladu 3:

   Označme A jev, jehož pravděpobnost počítáme, tj. že alespoň 1 linka byla zapojena správně. Označme dále A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, jev, že linka i byla zapojena správně. Jev A nastane tehdy, nastane-li alespoň jeden z jevů A_i, tj. pro hledanou pravděpodobnost platí

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

   Jevy A_i samozřejmě nejsou disjunktní (může jich nastat více zároveň). Proto využijeme větu o sčítání pravděpodobností, která říká, že

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

   Řečeno slovy, pravděpodobnost sjednocení n jevů ($n \geq 2$) spočítáme tak, že sečteme pravděpodobnosti jednotlivých dílčích jevů, poté pro všechny možné kombinace 2 jevů odečteme pravděpodobnosti,

že nastanou tyto 2 jevy zároveň, poté pro všechny možné kombinace 3 jevů přičteme pravděpodobnosti, že nastanou tyto 3 jevy zároveň, atd.
Poznamenejme, že pro $n = 2$ se věta o sčítání pravděpodobností redukuje na notoricky známý vzorec

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Poznamenejme dále, že pro výpočet $P(A)$ nevede k cíli na první pohled jednoduchá cesta $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, tj. že bychom využili opačný jev $\bar{A}$, tedy že žádná linka nebude zapojena správně. Po podrobnějším zamyšlení totiž zjistíme, že pravděpodobnost $P(\bar{A})$ nejsme schopni rozumně vypočítat.
Dosazením do věty o sčítání pravděpodobností dostaneme

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} +$$

$$+\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}.$$

Například druhý člen tohoto rozvoje (pravděpodobnosti „po dvojicích“) dostaneme následujícím způsobem:
2 linky z n, které budou zapojeny správně, můžeme vybrat $\binom{n}{2}$ způsoby. Pravděpodobnost, že 2 vybrané linky budou zapojeny správně (a to platí pro libovolnou dvojici), je rovna součinu $\frac{1}{n}$ (což je pravděpodobnost správného zapojení první vybrané linky - z n možností zapojení je 1 možnost příznivá) a $\frac{1}{n-1}$ (což je pravděpodobnost správného zapojení druhé vybrané linky - ze zbývajících $n - 1$ možností zapojení je opět jen 1 možnost příznivá). Analogicky postupujeme pro trojice, čtveřice, atd.
Upravíme-li nyní jednotlivé členy rozvoje jako

$$\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!} \quad \text{atp.},$$

dostáváme výsledek

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!}.$$

Konkrétně pro $n = 5$ máme $P(A) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{19}{30} \doteq 0,6333$.
Pravděpodobnost pro $n \to \infty$ určíme pomocí Eulerova čísla e, které úzce souvisí s faktoriály, které nám vyšly výše. Platí totiž

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

a obecně pak

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{pro} \ \ x \in \mathbb{R}$$

Vyjádření e je velmi podobné našemu výsledku pro $P(A)$. Střídání znamének dosáhneme volbou $x = -1$, tj.

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

a odtud už snadno nahlédneme, že

$$\lim_{n \to \infty} P(A) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \doteq 0,6321.$$

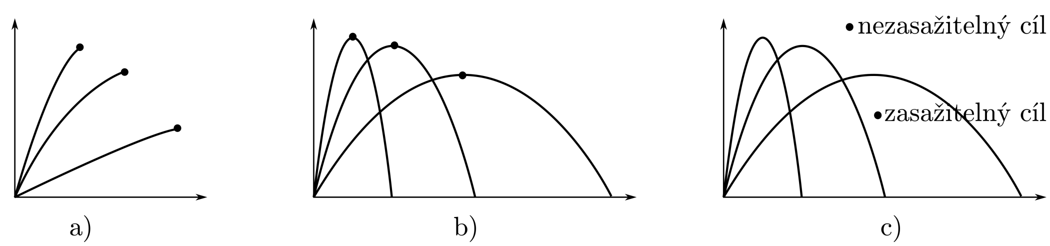
4. Z děla $D[0;0]$ střílíme šikmo vzhůru pod úhlem φ počáteční rychlostí o velikosti v_0. V čase t dospěje střela do bodu $P[x;y]$, kde

$$x = v_0 t \cos\varphi, \quad y = v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Odpor prostředí zanedbáváme, trajektorií střely je tedy parabola. Předpokládejme nyní, že z děla D střílíme střelami se stejnou počáteční rychlostí v_0, ale pod různými úhly φ, kde $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Co je množinou bodů, k nimž střely doletí za stejný čas t?
b) Co je množinou vrcholů trajektorií všech těchto střel?
c) Co je množinou bodů, které tvoří rozmezí pro zasažitelné a nezasažitelné cíle?

Ve všech případech najděte rovnici hledané křivky a křivku pojmenujte.



Obrázek 4: K zadání příkladu 4 a), b), c)

Řešení příkladu 4:

ad a) Za dobu t dospěje střela do bodu $P = [x;y]$, jehož souřadnice jsou $x = v_0 t \cos\varphi$ a $y = v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$. Vyloučíme proměnný parametr φ, tedy

$$\cos\varphi = \frac{x}{v_0 t} \;\Rightarrow\; y = v_0 t \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{v_0^2 t^2}} - \frac{1}{2} g t^2,$$

neboť $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, tj. $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$ pro $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Odtud

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 &= v_0^2 t^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{v_0^2 t^2}\right), \\ x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 &= (v_0 t)^2. \end{aligned}$$

Hledanou množinou bodů je tedy část kružnice v I. kvadrantu, která má střed v bodě $S = \left[0; -\frac{1}{2} g t^2\right]$ a poloměr $r = v_0 t$. Dodejme, že úloha má smysl pouze pro takový čas t, který je menší, než je doba letu střely pro alespoň nějaký úhel $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tj. je-li splněna podmínka $t < \frac{2v_0}{g}$ (viz část b)).

ad b) Jednotlivé střely dospějí do vrcholů svých trajektorií v různých časech t_V. Tento čas t_V můžeme odvodit několika způsoby.

- Z podmínky $y = 0$ určíme dobu letu střely. Tedy

$$\begin{aligned} v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2 &= 0, \\ t \cdot \left(v_0 \sin\varphi - \frac{1}{2} g t\right) &= 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 0,\, t_2 = \frac{2 v_0 \sin\varphi}{g}. \end{aligned}$$

  Ze symetrie parabolické dráhy pak dostáváme $t_V = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$, neboť vrcholu dosáhne střela v polovině doby, po kterou se bude pohybovat.

- Najdeme lokální extrém funkce y, tj. položíme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\varphi - gt = 0 \ \Rightarrow\ t_V = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}.$$

Pro tento čas t_V nyní dostáváme

$$x = v_0 t_V \cos\varphi = v_0 \cdot \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \cdot \cos\varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$y = v_0 t_V \sin\varphi - \frac{1}{2} g t_V^2 = v_0 \cdot \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\varphi - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\varphi.$$

Opět vyloučíme proměnný parametr φ. Označíme-li $h = \frac{v_0^2}{2g}$, dostáváme

$$\begin{aligned} x = 2h \sin\varphi \cos\varphi \quad &\Rightarrow \quad x^2 = 4h^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi, \\ y = h \sin^2\varphi \quad &\Rightarrow \quad \sin^2\varphi = \frac{y}{h}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x^2 &= 4h^2 \cdot \frac{y}{h} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right), \\ x^2 &= 4hy - 4y^2, \\ x^2 + 4y^2 - 4hy &= 0, \\ x^2 + 4 \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 &= h^2, \\ \frac{x^2}{h^2} + \frac{\left(y - \frac{h}{2}\right)^2}{\frac{h^2}{4}} &= 1. \end{aligned}$$

Hledanou množinou vrcholů je tedy část elipsy (v I. kvadrantu), která má střed v bodě $S = \left[0; \frac{h}{2}\right]$ a poloosy $a = h$, $b = \frac{h}{2}$ (kde $h = \frac{v_0^2}{2g}$).

ad c) Z rovnic $x = v_0 t \cos\varphi$ a $y = v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$ vyloučíme čas t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi} \ \Rightarrow\ y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos\varphi} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi}.$$

Využijeme-li $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ a $\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$, dostaneme rovnici

$$y = x\mathrm{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right),$$

která je kvadratická vzhledem k $\mathrm{tg}\varphi$. Po úpravě:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \mathrm{tg}^2\varphi - x\mathrm{tg}\varphi + y + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0.$$

Dostaneme-li 2 reálné kořeny, můžeme daný cíl $C = [x; y]$ zasáhnout výstřely pod dvěma různými úhly výstřelu. Dostaneme-li dvojnásobný kořen, leží daný cíl C tak, že jej můžeme zasáhnout jen pod jedním úhlem. Dostaneme-li komplexní kořeny, nelze daný cíl C zasáhnout.
Pro cíle, které jsou zasažitelné jen pod jedním úhlem výstřelu (a které tedy tvoří hranici mezi

zasažitelnými a nezasažitelnými cíly), platí, že diskriminant této kvadratické rovnice je roven 0. Označíme-li opět $h = \frac{v_0^2}{2g}$, dostáváme

$$\begin{aligned}
x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) &= 0,\\
x^2 - \frac{x^2}{h} \cdot \left(y + \frac{x^2}{4h}\right) &= 0,\\
4h^2x^2 - 4hx^2y - x^4 &= 0,\\
4h^2 - 4hy - x^2 &= 0,\\
x^2 &= -4h(y-h).
\end{aligned}$$

Hledanou množinou bodů je tedy část paraboly v I. kvadrantu, která má vrchol v bodě $V = [0; h]$ a parametr $p = 2h$. Parabola se otevírá směrem dolů.

5. Nalezněte všechna přirozená čísla x, y a z, kde z je největší společný dělitel x a y, která splňují rovnici

$$x + y^2 + z^3 = xyz. \tag{3}$$

Řešení příkladu 5:

Pokud z je největší společný dělitel (zkráceně NSD) x a y, kde $x, y, z \in \mathbb{N}$, pak platí $az = x$ a $bz = y$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Dosazením do zadané rovnice (3) dostaneme

$$az + b^2z^2 + z^3 = abz^3.$$

Tuto rovnici vydělíme číslem z , čímž dostaneme

$$a + b^2z + z^2 = abz^2. \tag{4}$$

Z vyjádření (4) vyplývá, že a je dělitelné číslem z, což lze zapsat jako $a = cz$, kde $c \in \mathbb{N}$. Dosadíme-li $a = cz$ do rovnice (4), tak po vydělení číslem z dostáváme

$$c + b^2 + z = cbz^2, \tag{5}$$

odkud vyjádříme c jako

$$c = \frac{b^2 + z}{bz^2 - 1}. \tag{6}$$

Nyní volme systematicky hodnoty NSD čísel x a y, tedy čísla z.

Začneme volbou $z = 1$. Dosazením $z = 1$ do (6) dostaneme po vydělení polynomu v čitateli polynomem ve jmenovateli vztah

$$c = \frac{b^2 + 1}{b - 1} = b + 1 + \frac{2}{b - 1}. \tag{7}$$

Rovnice (7) má řešení pouze $b = 2$ nebo $b = 3$ a $c = 5$ v obou případech. Řešeními zadané rovnice (3) tedy budou trojice $[x, y, z] = [5, 2, 1]$ a $[x, y, z] = [5, 3, 1]$.

Pokračujeme hledáním řešení pro $z = 2$. Dosazením $z = 2$ do rovnice (6) dostaneme

$$c = \frac{b^2 + 2}{4b - 1} = \frac{4b}{16} + \frac{1}{16} + \frac{33}{16(4b - 1)}.$$

Výraz za druhým rovnítkem získáme opět dělením polynomů se zbytkem. Aby c mohlo být přirozené číslo, musí být podíl $\dfrac{33}{4b - 1}$ celé číslo. Takže $b = 1$ nebo $b = 3$ a $c = 1$ v obou případech. Řešeními zadané rovnice (3) tedy budou trojice $[x, y, z] = [4, 2, 2]$ a $[x, y, z] = [4, 6, 2]$.

Nyní dokážeme, že pro $z \geq 3$ již žádné další řešení zadané rovnice (3) neexistuje. Rovnici (6) vynásobíme číslem z^2 a získáme vztah

$$cz^2 = \frac{b^2z^2 + z^3}{bz^2 - 1} = \frac{b^2z^2 + z^3 + b - b}{bz^2 - 1} = \frac{b(bz^2 - 1) + z^3 + b}{bz^2 - 1} = b + \frac{z^3 + b}{bz^2 - 1}.$$

Na základě podmínek, že b a c jsou přirozená čísla a $z \geq 3$ platí, že $cz^2 - b = \dfrac{z^3 + b}{bz^2 - 1} \geq 1$ a zlomek $\dfrac{z^3 + b}{bz^2 - 1}$ musí vyjadřovat celé číslo. Z nerovnosti $\dfrac{z^3 + b}{bz^2 - 1} \geq 1$ (poznamenejme, že pro $z \geq 3$ je jmenovatel kladný) vyjádříme b a po vydělení polynomu polynomem získáme nerovnost

$$b \leq \frac{z^3 + 1}{z^2 - 1} = \frac{(z + 1)(z^2 - z + 1)}{(z + 1)(z - 1)} = \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} = z + \frac{1}{z - 1}. \tag{8}$$

Provedeme odhad výrazu na pravé straně nerovnosti (8). Je zřejmé, že pro $z \geq 3$ platí $z + \frac{1}{z-1} < z + 1$. Potom pro číslo b máme k dispozici odhad pomocí ostré nerovnosti a platí $b < z + 1$, z čehož pro přirozená čísla b a z vyplývá, že

$$b \leq z.$$

Díky tomuto odhadu a rovnosti (6) můžeme odhadnout hodnotu c. Do čitatele vyjádření pro c dosaďme nejvyšší přípustnou hodnotu $b = z$ a do jmenovatele nejnižší přípustnou hodnotu $b = 1$. Potom musí platit

$$c = \frac{b^2 + z}{bz^2 - 1} \leq \frac{z^2 + z}{z^2 - 1} = \frac{z(z + 1)}{(z + 1)(z - 1)} = \frac{z + 1 - 1}{z - 1} = 1 + \frac{1}{z - 1} < 2.$$

Takže jediné možné přirozené číslo c je $c = 1$. Hodnotu $c = 1$ dosadíme do (5) a dostáváme kvadratickou rovnici vzhledem k proměnné b ve tvaru

$$b^2 - z^2b + z + 1 = 0.$$

Diskriminant této rovnice je $D = (-z^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (z + 1) = z^4 - 4z - 4$ a řešení tedy budou

$$b_{1,2} = \frac{z^2}{2} \pm \frac{\sqrt{z^4 - 4z - 4}}{2}. \tag{9}$$

Ale, aby b mohlo být přirozené číslo musí být $\sqrt{z^4 - 4z - 4}$ celé číslo. Odhadněme číslo $\sqrt{z^4 - 4z - 4}$ a ukažme, že nemůže být celé. Uvažujme číslo $(z^2 - 1)^2 = z^4 - 2z^2 + 1$ a číslo $(z^2)^2 = z^4$. Pro $z \geq 3$ platí $(z^2 - 1)^2 < z^4 - 4z - 4 < (z^2)^2$, tedy

$$z^2 - 1 < \sqrt{z^4 - 4z - 4} < z^2$$

a vidíme, že číslo $\sqrt{z^4 - 4z - 4}$ leží mezi po sobě jdoucími přirozenými čísly, tedy číslo $\sqrt{z^4 - 4z - 4}$ nemůže být celé. Proto neexistuje přirozené číslo b, které by splňovalo (9). Tedy pro $z \geq 3$ řešení zadané rovnice neexistuje.

Všechna řešení zadané úlohy jsou tedy trojice $[x, y, z] = [5, 2, 1]$, $[x, y, z] = [5, 3, 1]$, $[x, y, z] = [4, 2, 2]$ a $[x, y, z] = [4, 6, 2]$.

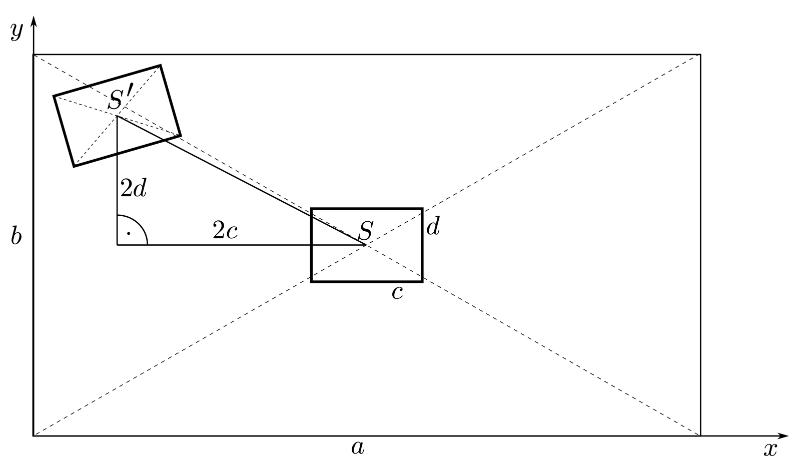
6. Mějme obdélníkový stůl o rozměrech $a \times b$. Zaveďme souřadný systém tak, že počátek bude v levém dolním rohu stolu, kladný směr osy x půjde po delší hraně stolu a kladný směr osy y po kratší hraně stolu. Na stole máme položený obdélníkový obrázek o rozměrech $c \times d$, přičemž $0 < d < c < b < a$. Tento obrázek leží na stole tak, že jeho střed S je umístěný na středu stolu a delší strana obrázku je rovnoběžná s osou x. Obrázek nám ovšem překáží v práci, proto ho posuneme o $2c$ v záporném směru osy x a o $2d$ v kladném směru osy y. Aby se nám na něj lépe dívalo, tak si obrázek pootočíme kolem jeho středu S o úhel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ v kladném směru, tj. proti směru oběhu hodinových ručiček.

   a) O jakou vzdálenost jsme posunuli střed S obrázku?
   b) Jaké jsou souřadnice levého horního rohu obrázku po posunutí a otočení (označme tento bod například L'_h)?
   c) Spočtěte souřadnice středu S, posunutého středu S', levého horního rohu L_h původního obrázku a levého horního rohu L'_h posunutého a otočeného obrázku pro hodnoty $a = 90$ cm, $b = 65$ cm, $c = 15$ cm, $d = 10$ cm, $\alpha = 30°$. Vypočtené souřadnice zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

Řešení příkladu 6:

ad a) Označme S' střed posunutého obrázku, viz Obrázek 5. Potom

$$|SS'| = \sqrt{(2d)^2 + (2c)^2} = 2\sqrt{c^2 + d^2}.$$



Obrázek 5: K řešení příkladu 6 a)

ad b) Víme, že souřadnice středu S, levého horního rohu L_h a posunutého středu S' jsou

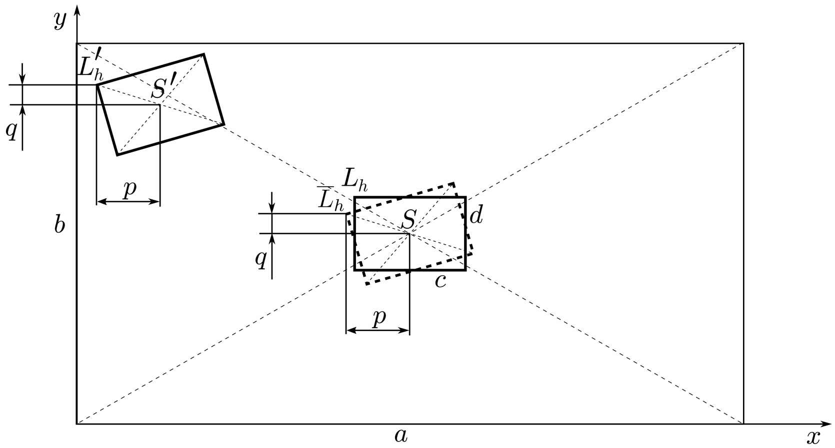
$$S = \left[\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right], \quad L_h = \left[\frac{a}{2} - \frac{c}{2}; \frac{b}{2} + \frac{d}{2}\right], \quad S' = \left[\frac{a}{2} - 2c; \frac{b}{2} + 2d\right],$$

viz Obrázek 6. Označme úhel mezi úhlopříčkou SL_h a svislou osou obrázku jako β, viz Obrázek 7 a zaměřme se na určení posuvu $(p; q)$. Při úvahách o pozici posunutého a otočeného horního levého rohu L'_h zjistíme, že závisí na volbě úhlu α, viz detailní rozbor na Obrázku 7. Označme hledané souřadnice posunutého a otočeného horního levého rohu L'_{h_1} pro $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ jako

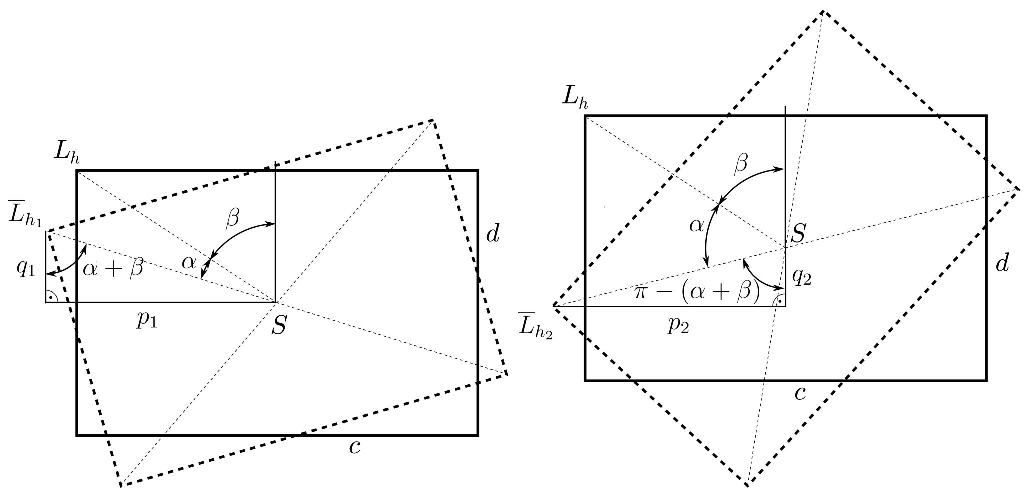
$$L'_{h_1} = \left[\frac{a}{2} - 2c - p_1; \frac{b}{2} + 2d + q_1\right], \tag{10}$$

a souřadnice bodu L_{h_2} pro $\pi > \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ jako

$$L'_{h_2} = \left[\frac{a}{2} - 2c - p_2; \frac{b}{2} + 2d - q_2\right], \tag{11}$$



Obrázek 6: K řešení příkladu 6 b)



Obrázek 7: Detail k řešení příkladu 6 b), vlevo pro $\alpha+\beta \leq \frac{\pi}{2}$, vpravo pro $\pi > \alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$

Uveďme několik faktů, které jsou zřejmé z Obrázku 6. Platí

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tg}\beta &= \frac{\frac{c}{2}}{\frac{d}{2}}, \\
\beta &= \mathrm{arctg}\frac{c}{d}, \\
|SL_h'| &= |SL_h| = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Pro $\alpha+\beta \leq \frac{\pi}{2}$ platí

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{p_1}{|SL_h|}, \\
p_1 &= |SL_h| \cdot \sin(\alpha+\beta), \\
p_1 &= \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \mathrm{arctg}\frac{c}{d}\right), \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{q_1}{|SL_h|}, \\
q_1 &= |SL_h| \cdot \cos(\alpha+\beta), \\
q_1 &= \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \mathrm{arctg}\frac{c}{d}\right).
\end{aligned}
$$

Pro $\pi > \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ platí (poznamenejme, že $\sin(\pi - x) = \sin x$ a $\cos(\pi - x) = -\cos x$)

$$\begin{aligned}
\sin(\pi - (\alpha + \beta)) &= \frac{p_2}{|SL_h|}, \\
p_2 &= |SL_h| \cdot \sin(\alpha + \beta), \\
p_2 &= \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right) = p_1, \\
\cos(\pi - (\alpha + \beta)) &= \frac{q_2}{|SL_h|}, \\
q_2 &= |SL_h| \cdot (-\cos(\alpha + \beta)), \\
q_2 &= -\frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right) = -q_1.
\end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených hodnot posuvů do vyjádření (10) a (11) souřadnic bodu L'_h získáváme pro $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$

$$L'_{h_1} = \left[\frac{a}{2} - 2c - \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right); \frac{b}{2} + 2d + \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right)\right].$$

Pro $\pi > \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ platí

$$L'_{h_2} = \left[\frac{a}{2} - 2c - \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right); \frac{b}{2} + 2d - \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \cdot \cos\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{c}{d}\right)\right].$$

ad c) Proveďme výpočet pro konkrétní zadané hodnoty $a = 90$ cm, $b = 65$ cm, $c = 15$ cm, $d = 10$ cm, $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
\beta &= \operatorname{arctg}\frac{15}{10} \doteq 56,3° \\
\alpha + \beta &\doteq 30° + 56,3° \leq 90°
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \left[\frac{90}{2}; \frac{65}{2}\right] = [45,0 \text{ cm}; 32,5 \text{ cm}] \\
L_h &= \left[\frac{90}{2} - \frac{15}{2}; \frac{65}{2} + \frac{10}{2}\right] = [37,5 \text{ cm}; 37,5 \text{ cm}] \\
S' &= \left[\frac{90}{2} - 2 \cdot 15; \frac{65}{2} + 2 \cdot 10\right] = [15,0 \text{ cm}; 52,5 \text{ cm}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L'_{h_1} &= \left[\frac{90}{2} - 2 \cdot 15 - \frac{\sqrt{15^2 + 10^2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg}\frac{15}{10}\right);\right. \\
&\quad \left.\frac{65}{2} + 2 \cdot 10 + \frac{\sqrt{15^2 + 10^2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg}\frac{15}{10}\right)\right] \doteq \\
&\doteq [6,0 \text{ cm}; 53,1 \text{cm}]
\end{aligned}$$

7. Najděte všechna přirozená čísla a, b taková, že $b > 2$ a výraz $2^a + 1$ je dělitelný výrazem $2^b - 1$.

Řešení příkladu 7:

Má platit

$$2^a + 1 = t(2^b - 1), \quad \text{kde } t \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

tedy pro $b > 2$ platí

$$2^b - 1 < 2^a + 1 \tag{13}$$

odkud plyne i vztah $a > b > 2$.

Zapišme číslo a ve tvaru $a = qb + r$, kde $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $r < b$ a dokažme, že dělením čísla $2^a + 1$ číslem $2^b - 1$ dostaneme číslo, které není přirozené, což bude v rozporu s platností vztahu (12).

Abychom si udělali představu, jak výraz $\dfrac{2^a + 1}{2^b - 1}$ vypadá ve fázi, kdy jsme schopni rozhodnout zda jde nebo nejde o přirozené číslo, proveďme volbu parametru $q = 2$ a $q = 3$ (a úměrně tomu uvažujeme hodnoty a, b, r tak, aby výrazy měly smysl) odkud pak vyvodíme vztah pro obecné $q \in \mathbb{N}$.

Zvolme $q = 2$, potom

$$\frac{2^a + 1}{2^b - 1} = \frac{2^{2b+r} + 1}{2^b - 1} = 2^{b+r} + 2^r + \frac{2^r + 1}{2^b - 1},$$

kde výraz na pravé straně získáme jako bychom výraz $(2^{2b+r} + 1) : (2^b - 1)$ dělili stejným principem, jako polynom polynomem. Odtud pak vhodným přičtením nuly ve tvaru $b - b$, resp. $2b - 2b$ a díky $a = 2b + r$, dostáváme

$$\frac{2^{2b+r} + 1}{2^b - 1} = 2^{b+b-b+r} + 2^{2b-2b+r} + \frac{2^r + 1}{2^b - 1} = 2^{a-b} + 2^{a-2b} + \frac{2^r + 1}{2^b - 1}.$$

Zvolme $q = 3$, potom

$$\frac{2^a + 1}{2^b - 1} = \frac{2^{3b+r} + 1}{2^b - 1} = 2^{2b+r} + 2^{b+r} + 2^r + \frac{2^r + 1}{2^b - 1}$$

a stejnou úpravou, jako byla pro $q = 2$, dostáváme

$$\frac{2^{3b+r} + 1}{2^b - 1} = 2^{a-b} + 2^{a-2b} + 2^{a-3b} + \frac{2^r + 1}{2^b - 1}.$$

Zobecněním pro $a = qb + r$, kde $q \in \mathbb{N}$ a $0 \leq r < b$, dostáváme

$$\frac{2^a + 1}{2^b - 1} = 2^{a-b} + 2^{a-2b} + \cdots + 2^{a-qb} + \frac{2^r + 1}{2^b - 1}.$$

Pro zbytek $\dfrac{2^r + 1}{2^b - 1}$ platí, že leží v intervalu $(0, 1)$, tj.

$$0 < \frac{2^r + 1}{2^b - 1} < 1,$$

tedy k přirozenému číslu $2^{a-b} + 2^{a-2b} + \cdots + 2^{a-qb}$ přičteme nenulový zbytek $\dfrac{2^r + 1}{2^b - 1}$ z intervalu $(0, 1)$ a tím pádem $\dfrac{2^a + 1}{2^b - 1}$ není číslo přirozené a zadaná úloha tím pádem nemá řešení.

8. Najděte nejméně dva funkční předpisy pro nenulovou spojitou funkci f, má-li platit

$$f^2(x+y) = f^2(y) + f^2(x) - 2f^2(x)f^2(y) + f(2x)f(y)\cos(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Řešení příkladu 8:

Triviálním řešení zadané rovnice (14) je zřejmě $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Provedeme několik úvah o rovnici (14), které nás navedou na hledané řešení. Zaprvé si uvědomíme fakt, že úloha je symetrická. Levá strana rovnice nezáleží na pořadí x, y, tedy

$$f^2(x+y) = f^2(y+x).$$

Díky této symetričnosti platí

$$f^2(y)+f^2(x)-2f^2(x)f^2(y)+f(2x)f(y)\cos(y) = f^2(x)+f^2(y)-2f^2(y)f^2(x)+f(2y)f(x)\cos(x),$$

odkud

$$f(2x)f(y)\cos(y) = f(2y)f(x)\cos(x). \tag{15}$$

Snažme se zvolit vhodné x, které nám napoví více o naší hledané funkci $f(x)$. Na pravé straně poslední rovnice je $\cos(x)$.

Jako první rozumný kandidát na x se tedy nabízí $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, protože kosinus pro tato x nabývá nulových hodnot a dostáváme

$$f(\pi + 2k\pi)f(y)\cos(y) = 0. \tag{16}$$

Díky faktu, že hodnota $f(y)$ závisí na proměnné y, dostáváme z předchozí rovnice ihned důležitou informaci, že

$$f(\pi + 2k\pi) = 0. \tag{17}$$

Nyní je postup získávání dalších informací o chování funkce $f(x)$ víceméně intuitivní.

Zvolíme za x například $x = \pi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Potom po dosazení do (15) platí

$$f(2\pi + 4k\pi)f(y)\cos(y) = f(2y)f(\pi + 2k\pi)\cos(\pi + 2k\pi), \tag{18}$$

odkud díky (17) plyne, že je pravá strana předchozí rovnice rovna nule, tedy že platí

$$f(2\pi + 4k\pi)f(y)\cos(y) = 0,$$

odkud dostáváme

$$f(2\pi + 4k\pi) = 0. \tag{19}$$

Zobecníme-li v tomto duchu volbu x, pak můžeme tvrdit, že pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(k\pi) = 0. \tag{20}$$

Nyní proveďme volbu $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a dosaďme do zadané rovnice (14). Získáme vztah

$$f^2(x + k\pi) = f^2(k\pi) + f^2(x) - 2(f^2(x))(f^2(k\pi)) + f(2x)f(k\pi)\cos(k\pi), \tag{21}$$

který s využitím (20) upravíme do tvaru

$$f^2(x + k\pi) = f^2(x). \tag{22}$$

Nápadným kandidátem pro řešení naší rovnice je funkce $f(x) = \sin(x)$. Díky druhým mocninám v zadání budeme uvažovat i funkci $f(x) = -\sin x$.

Ověřme, že $f(x) = \sin x$ je řešením zadané rovnice (14), tedy že platí

$$\sin^2(x+y) = \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + \sin(2x)\sin(y)\cos(y). \tag{23}$$

Použitím součtového vzorce $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ dostáváme

$$(\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x))^2 = \sin^2(y)+\sin^2(x)-2\sin^2(x)\sin^2(y)+2\sin(x)\cos(x)\sin(y)\cos(y),$$

použitím vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ upravíme levou stranu rovnice na tvar

$$\sin^2(x)\cos^2(y) + 2\sin(x)\cos(y)\sin(y)\cos(x) + \sin^2(y)\cos^2(x) =$$

$$= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + 2\sin(x)\cos(x)\sin(y)\cos(y) =$$

$$= \sin^2(y) + \sin^2(x) - 2\sin^2(x)\sin^2(y) + \sin(2x)\sin(y)\cos(y).$$

Tedy $f(x) = \sin(x)$ je skutečně řešením zadané rovnice (14).

V zadání se funkce $f(x)$ vyskytuje vždy ve druhé mocnině, tedy řešením zadané rovnice (14) je i funkce $f(x) = -\sin(x)$.

Získali jsme tedy netriviální řešení $f(x) = \sin(x)$ a $f(x) = -\sin(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Dva studenti si o přestávce krátí čas hrou. Mají u sebe $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ kuliček a domluví se na těchto pravidlech: Před hrou si pevně zvolí $k \in \mathbb{N}$ tak, že $1 < k < n$. Hráči se na tahu pravidelně střídají. Hráč, který je na tahu, může odebrat libovolný počet kuliček v rozmezí $1, \ldots, k$. Vítězem se stává hráč, který odebere poslední kuličku. Určete všechny kombinace čísel k, n, pro které existuje vítězná strategie pro začínajícího hráče, tedy strategie, se kterou nelze v žádném případě prohrát.

Řešení příkladu 9: Demonstrujme si ideu řešení nejprve pro pevně zvolené k. Nechť je například stanoveno, že je možné jedním tahem odebrat nejméně jednu a maximálně $k = 5$ kuliček:
Potom nejmenším přípustným počtem hracích kuliček je díky podmínce $1 < k < n$ počet $n = 6$ kuliček. V takovém případě je však začínající hráč odsouzen s jistotou prohrát, neboť odebráním kuliček v rozmezí $1, \ldots, 5$ vždy zbude počet kuliček, který je protihráč schopen odebrat. Pro kombinaci $k = 5$ a $n = 6$ tedy neexistuje vítězná strategie pro začínajícího hráče.

Dále uvažujme, že máme stále nastaveno $k = 5$, ale zvýšíme počet kuliček ve hře na $n = 7$. V takovém případě začínající hráč odebere v prvním tahu 1 kuličku a dostává svého protihráče do situace popsané v předchozím případu. Pro kombinaci $k = 5$ a $n = 7$ existuje vítězná strategie pro začínajícího hráče (stává vítězem bez ohledu na schopnosti svého protihráče).

Pro $k = 5$ a $n \in \{8, 9, 10, 11\}$ nastává obdobná situace, a tedy pro začínajícího hráče existuje vítězná strategie.

V případě, že $k = 5$ a $n = 12$ je protihráč schopen porazit začínajícího hráče s jistotou. Řekněme, že začínající hráč odebere m kuliček, kde $m \in \mathbb{N}$ takové, že $1 \leq m \leq k = 5$. Potom na protihráče zbývá $n - m$ kuliček. Pokud protihráč chytře odebere $k + 1 - m$ kuliček, pak na začínajícího hráče zbude $n - m - (k + 1 - m) = n - k - 1$ kuliček, což v našem případě znamená 6 kuliček. Tím se začínající hráč ocitl v situaci popsané v úvodu a nemá šanci vyhrát. Pro $k = 5$ a $n = 12$ pro začínajícího hráče neexistuje jednoznačná vítězná strategie.

Stejná situace, kdy začínající hráč při volbě $k = 5$ nemá výhru jistou, nastává pro $n \in \{18, 24, 30, 36, \ldots\}$.

Zobecníme-li úvahy pro $k, n \in \mathbb{N}$, kde $n > 2$ a $1 < k < n$, lze v případě, že číslo $k+1$ dělí číslo n (tj. $(k+1) \mid n$) tvrdit, že začínající hráč s jistotou prohraje, má-li proti sobě chytře hrajícího hráče. Tedy vítězná strategie pro začínajícího hráče existuje jen pro všechny kombinace k a n takové, že $k+1$ nedělí číslo n, (tj. $(k+1) \nmid n$).

10. Je dán systém třech kongruencí a jedné rovnice

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv 17 \pmod{43}, \\ c &\equiv 3 \pmod{7}, \\ c &\equiv d \pmod{13}, \\ c &= a + b, \end{aligned}$$

kde čísla a, b, c, d jsou přirozená čísla. Najděte řešení pro 3 nejmenší hodnoty a a k nim nejmenší přípustné hodnoty b a nejmenší přípustné hodnoty d.

Řešení příkladu 10:

Z kongruence $a^2 \equiv 17 \pmod{43}$ plyne, že

$$a^2 \in \{17 + 43r, r \in \mathbb{Z}\} = \{17, 60, 103, 146, 189, 232, 275, 318, 361, 404, 447, 490, 533, 576, \ldots\}.$$

Vzhledem k tomu, že a má být přirozené číslo, vybereme jen vhodné druhé mocniny, tj. $361 = 19^2$ a $576 = 24^2$. Ukažme, že čísla 19 a 24 jsou opravdu jediná v tom smyslu, že všechna ostatní čísla a je možné vyjádřit ve tvaru

$$a \in (\{19 + 43s, s \in \mathbb{Z}\} \cup \{24 + 43t, t \in \mathbb{Z}\}) \cap \mathbb{N} = \{19, 24, 62, 67, \ldots\}.$$

Předpokládejme hledané a ve tvaru $a = 43u + v$, $u \in \mathbb{Z}$, $0 \leq v \leq 42$ a $v \in \mathbb{N}$. Potom $a^2 = (43u + v)^2 = (43u)^2 + 2 \cdot 43uv + v^2 = 43(43u^2 + 2uv) + v^2$, kde se v^2 má rovnat číslu 17 modulo 43, tedy $v^2 = 17 \pmod{43}$. Vyzkoušíme-li všechny přípustné hodnoty v od 0 do 42, ukáže se, že pouze $19^2 = 361 = 8 \cdot 43 + 17$ a $24^2 = 576 = 13 \cdot 43 + 17$. Tedy čísla 19 a 24 jsou jediná možná jako „základ“ pro číslo a.
Kongruence $c \equiv 3 \pmod{7}$ s podmínkou, že c je přirozené číslo, nám říká, že

$$c \in \{3 + 7p, p \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N} = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94, \ldots\}. \tag{24}$$

Kongruence $c \equiv d \pmod{13}$ s podmínkou, že c a d jsou přirozená čísla, nám říká, že

$$c \in \{d + 13q, q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N} = \{d, d + 13, d + 26, d + 39, d + 52, d + 65, d + 78, d + 91, d + 104, \ldots\}.$$

Uvažujme variantu, že $a = 19$. Ze vztahu $c = a + b$ plyne, že $c = 19 + b$. Nejmenší přípustné přirozené číslo b tak, aby c patřilo do množiny dané vztahem (24) je zřejmě $b = 5$, odkud $c = 24$, a potom nejmenší přípustné d je $d = 11$. Řešením je tedy $[a, b, c, d] = [19, 5, 24, 11]$.

Uvažujme variantu, že $a = 24$ a postupujme obdobně. Ze vztahu $c = a + b$ plyne, že $c = 24 + b$. Volbou nejmenšího přípustného čísla $b = 7$ získáváme $c = 31$, a potom $d = 5$. Řešením je tedy $[a, b, c, d] = [24, 7, 31, 5]$.

Do třetice pro $a = 62$ ze vztahu $c = a + b$ plyne, že $c = 62 + b$. Volbou nejmenšího přípustného $b = 4$ získáváme $c = 66$, a potom $d = 1$. Řešením je tedy $[a, b, c, d] = [62, 4, 66, 1]$.